



L'ultima cifra

L'altro giorno Chiara discuteva con due suoi amici; era presente anche Alberto, il cugino grande di Chiara, che studia ingegneria all'università, e sua zia, che fa la ricercatrice in matematica. Chiara è ancora alla scuola primaria, ed è una ragazzina sveglia a cui piace giocare con i numeri; prima ha detto ai suoi amici che lei (da vera maghetta) sa che $9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9$ è un numero che finisce per 9; e fin qui tutti le han creduto, anche perché lo hanno verificato con la calcolatrice. Ma poi li ha addirittura sfidati in questo modo: "Voi ditemi un numero, qualsiasi, anche grandissimo, e io vi so dire qual è l'ultima cifra di $9 \times 9 \times \dots$ moltiplicando tanti 9 quanti ne indica il numero che mi avete detto."

E se non è magia questa...!

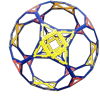
Chiara non ha ancora studiato le potenze e non sa usare bene le lettere al posto dei numeri; noi avremmo potuto anche dire così: "Voi ditemi un numero qualsiasi n e io vi so dire qual è l'ultima cifra di 9^n ".

A suo cugino Alberto questa sembra una spaccinata inverosimile (anche perché, quando il numero diventa davvero grande, non si riesce a verificarlo nemmeno con la calcolatrice...!); però la zia ha detto che Chiara ha ragione, che si può fare, in maniera abbastanza semplice, e che si potrebbe fare anche con altri numeri al posto del 9; ha aggiunto addirittura che la calcolatrice per questo problema non serve proprio a niente.

E voi? Avete capito qual è il "trucco" di Chiara? E perché questo trucco funziona?

Qual è l'ultima cifra di 9^7 ? e di 9^4 ? e di 9^{57} ? e di 9^{2018} ? e di 9^{2019} ?

Il cugino di Chiara non ha capito come funziona e Chiara glielo deve spiegare. Aiutatela:



se l'esponente è ... allora 9 elevato a quell'esponente finisce per ...

se invece l'esponente è ... allora 9 elevato a quell'esponente finisce per ...

Il cugino di Chiara è proprio testardo. Nonostante Chiara gli abbia svelato il suo "trucco", quasi si arrabbia: "Non ci credo! Nei casi che riesco a controllare facendo i conti con la calcolatrice è vero, va bene, ma questo non ci assicura per niente che poi la stessa cosa sia vera sempre!"

Come fareste a convincerlo che invece è proprio così?

E ora provate a giocare con qualche altro numero.

Se Chiara, invece del 9, avesse usato il 5, il problema sarebbe stato più facile. Qual è l'ultima cifra di 5^{2018} ? e di 5^{2019} ? Sapreste formulare una regola generale sull'ultima cifra di una (qualsiasi!) potenza di 5? Come scrivereste questa regola? Perché siete sicuri che funziona sempre?

Sapreste trovare un altro numero che si comporta come il 5, per cui il gioco di Chiara è molto facile? Quale? E perché anche con questo numero succede lo stesso fenomeno che succede col 5?

Ecco invece un caso più complicato.

Qual è l'ultima cifra di 7^2 ? e di 7^3 ? e di 7^4 ? e di 7^5 ? e di 7^{57} ? e di 7^{2018} ? e di 7^{2019} ?

Per indovinare qual è l'ultima cifra di 7 elevato a un numero qualsiasi basta guardare l'esponente. Ma quale caratteristica dell'esponente occorre guardare?

Alberto continua a dire che non ci crede. Come fate a convincerlo che le cose stanno proprio come dice Chiara?